Institut für Didaktik der
Mathematik und Physik
Prof. Dr. Thomas Gawlick

Das Projekt HeuRekAP

*(**Heu**ristische **Rek**onstruktion von **A**ufgaben zum **P**roblemlösen)*

Heuristik (die Kunst des Problemlösens) zu erlernen, ist ein wichtiges Anliegen des Mathematikunterrichtes (dritte Grunderfahrung nach Winter). Empirische Untersuchungen zeigen:

1. Der Einsatz von Heurismen ist positiv korreliert mit dem Problemlöseerfolg.
2. Der Einsatz von Heurismen kann erfolgswirksam trainiert werden.

Um heuristisches Arbeiten stärker in der täglichen Unterrichtspraxis zu verankern, benötigen Lehrende und Lernende **heuristische Kompetenz** – also die Fähigkeit, bekannte Heurismen bei aktuell zu bearbeitenden Aufgaben als potentiell lösungsförderlich zu erkennen und geeignet anzuwenden. (Beim Beweis des Innenwinkelsummensatzes erhält man z.B. die Parallele durch den Heurismus Hilfslinie.) Auf Seiten des Problemlösers erfolgt also – bewusst oder unbewusst – eine heuristische Analyse der zu bearbeitenden Aufgabe. Wie kann diese von der Lehrperson unterstützt werden?

Heuristische Rekonstruktion von Problemaufgaben

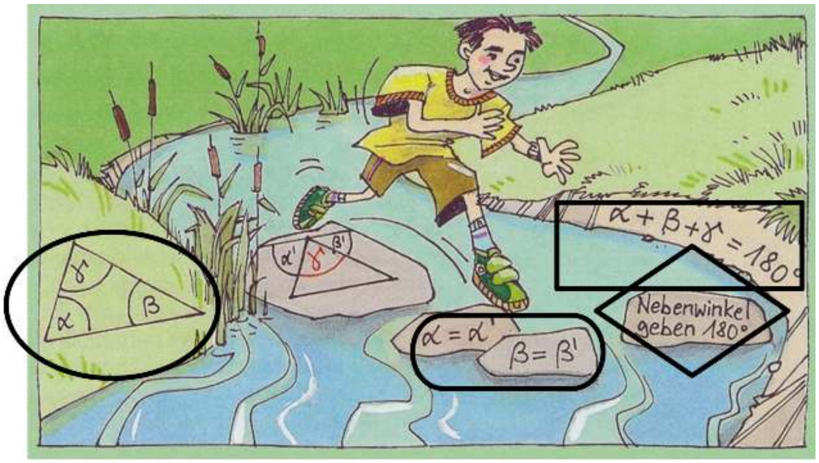
Dazu stellen wir ein methodisches Hilfsmittel zur unterrichtlichen Aufbereitung von Problemaufgaben bereit: die **Heuristische Rekonstruktion**. Ausgangspunkt sind Fragen, die sich bei der Unterrichtsvorbereitung ohnehin stellen:

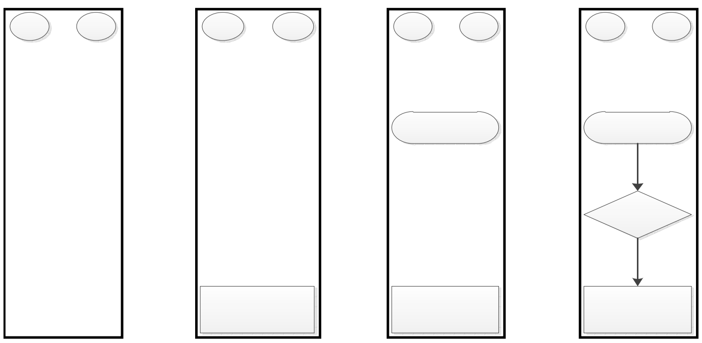
- Aus welchen Teilschritten besteht die Lösung dieser Aufgabe? (Teil der Sachanalyse)
- Wie findet man sie? (Heuristische Analyse)
- Was braucht man dabei für Vorkenntnisse? (Teil der Didaktischen Analyse)
- Wie kann man die Lernenden am besten heranführen? (Heuristische Instrumentation als Teil der Methodischen Analyse)

Um dabei systematisch vorzugehen, bedarf auch die Lehrkraft einer Technik, um Heurismen zu identifizieren. Damit können bereits bekannte Heurismen auch für die Schüler wiedererkennbar gemacht und der Einsatz neuer Heurismen geeignet vorbereitet werden.

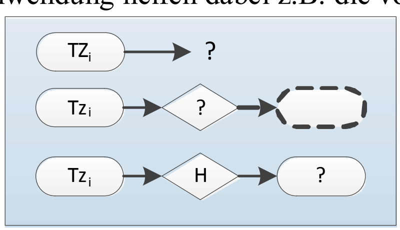
Als methodisches Instrument wird dazu der erweiterte Lösungsgraph eingeführt. Dieser geht auf Polya und König zurück: „„„Jede Aufgabe enthält Informationen über ihren **Start** und ihr **Ziel.** Eine Aufgabe lösen heißt, einen Weg vom Start zum Ziel zu finden. Dieser Weg führt oft über **Teilziele**, die mit Hilfe gewisser **Hilfsmittel** erreicht werden.

In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines **Lösungsgraphen** festhalten“ (König 1996, S.17) Knoten sind dabei Teilziele der Problemlösung, die durch die Lösungsschritte miteinander verbunden werden, durch die sie schrittweise erreicht werden. Wie der Lösungsgraph vom Problemlöser – bewusst oder unbewusst – schrittweise aufgebaut werden kann, ist Gegenstand der heuristischen Analyse.





Die obige Graphensequenz veranschaulicht, wie der Beweis des Satzes von der Innenwinkelsumme schrittweise aufgebaut wird. (Details im Basisartikel des MU-Hefts 5/2014) Hierbei wird deutlich, dass bekannte Strategien wie Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten spezielle Vorgehensweisen beim Erweitern dieses Graphen darstellen. Bei der konkreten Anwendung helfen dabei z.B. die von König vorgeschlagenen Teilziel- und Hilfsmittelfragen



Vorwärtsarbeiten (Teilzielfrage vor Hilfsmittelfrage)
Was lässt sich aus den gegebenen Größen (geg. Bedingungen, gegebenen Punkten, Voraussetzungen) unmittelbar berechnen (ableiten, konstruieren, folgern)? Begründung! (Welcher Satz, welche Definition, Formel, Umformungsregel wurde verwendet?)

.

Zudem lässt sich der Lösungsprozess durch die Auswahl geeigneter Medien (z.B. DGS) und Arbeitsformen (z.B. Stationenlernen) unterstützen – das ist die Rekonstruktionsphase der heuristischen Instrumentation. (Weitere Details in Gawlick, Th.: *„Click, Drag, Think!“ Posing and Exploring Conjectures with Dynamic Geometry Software*, in Habre, S. (ed.) *: Enhancing Mathematics Understanding through Visualization. IGI 2013*)

Heurismentraining – explizit oder implizit?

Lässt sich heuristisches Arbeiten einfach dadurch trainieren, dass es im Unterricht an hinreichend vielen Beispielen geübt wird? **(Implizites Training)** So sieht es Pólya, der in seinem Standardwerk „Schule des Denkens" (das erste moderne Heuristik-Lehrbuch) die Heurismen des mathematischen Problemlösens in einer Tabelle zusammengestellt hat: „Wenn der Lehrer in seinen Schülern die Denkoperationen entwickeln will, die den Fragen und Anregungen unserer Tabelle entsprechen, so legt er diese Fragen und Anregungen den Schülern so oft vor, wie er das ungezwungen tun kann. [...]. Dank dieser Führung wird der Schüler schließlich hinter den rechten Gebrauch dieser Fragen und Anregungen kommen." (Pólya 1949, S. 18)

Oder bedarf es hierfür eigener Unterrichtsphasen, in denen rückschauend Wesen und Wert von Heurismen beim Aufgabenlösen hervorgehoben werden? (**Explizites Training**) Diesen Standpunkt vertritt König: „Ausgewählte heuristische Vorgehensweisen sollten (als eine spezielle Art von Verfahrenskenntnissen) im Prozeß der Tätigkeit bewußt vermittelt werden. Das heißt, es geht um ein zielgerichtetes Aneignen und Anwenden im Unterricht und um ein explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen. Ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung reicht nicht aus." (König 1992, S. 24)

Das Projekt HeuRekAP entwickelte zur Klärung dieser Frage zwei alternative Trainingskonzepte, die in einer Langzeitstudie unterrichtlich erprobt wurden. Insgesamt folgte die Unterrichtsgestaltung beider Trainings folgenden Maximen:

- Regelmäßige Gelegenheiten zum Beweisen und Argumentieren für die SuS
- Schülerzentrierte Unterrichtsgestaltung auch in den Beweisphasen
- Kombination aus heuristischen und selbstregulativen Elementen
- Unterstützung des Unterrichtes mit interaktiven elektronischen Arbeitsblättern (EIWOS)
- Aufbereitung unterrichtlicher Aufgaben mittels heuristischer Rekonstruktion

Das explizite Heurismentraining in separaten Unterrichtsphasen verlief so:

1.) Schüler-Aktivität: Sammlung von früheren Verwendungen des Heurismus

Im Rahmen einer vorbereitenden Hausaufgabe haben die Schülerinnen und Schüler sich informiert bzw. zurückerinnert, wo und wann sie den fraglichen Heurismus schon verwendet haben und warum er in jener Situation hilfreich war:

a) Im selben Fach jetzt oder in der Vergangenheit

b) In anderen Fächern jetzt oder in der Vergangenheit

c) In außerschulischen Kontext

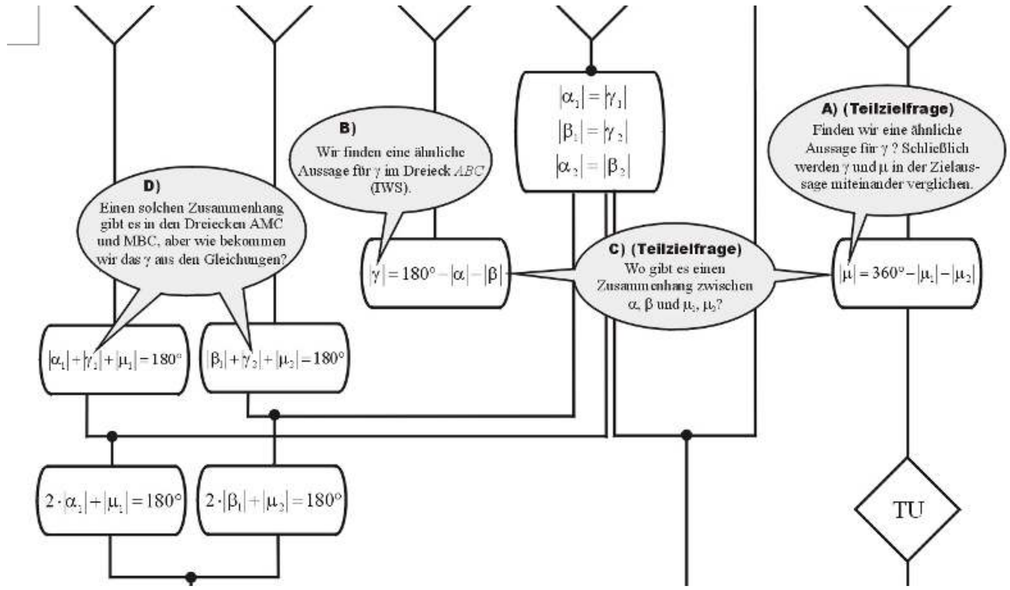
2.) Metaplan zum allgemeinen Nutzen des Heurismus

Leitfrage: Wie kann mir der Heurismus hilfreich sein?

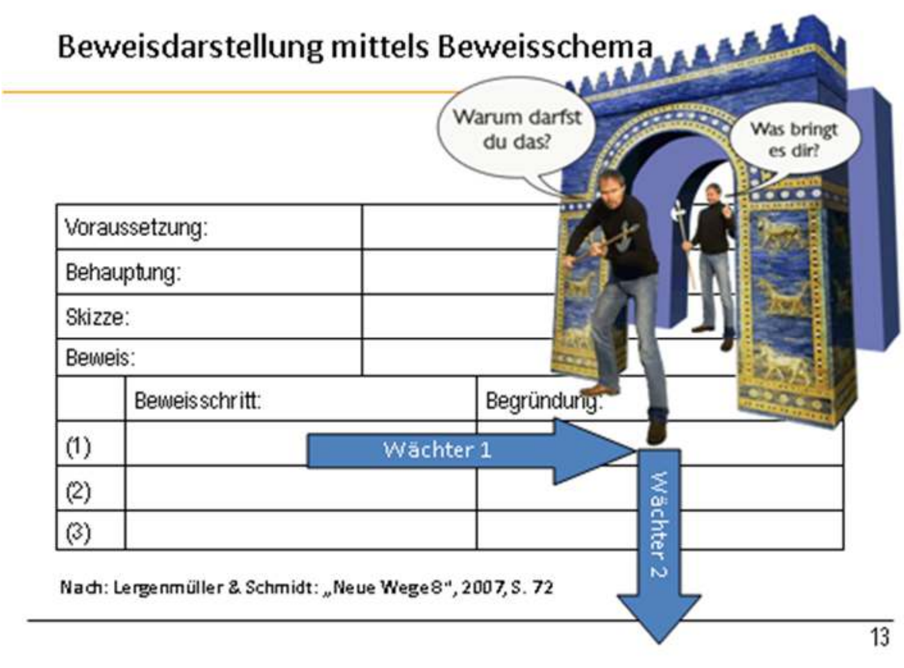
3.) Lehrer-Aktivität: Stellen von stoffübergreifenden Aufgaben

Der Lehrer stellt den Schülerinnen und Schülern stoffübergreifende Aufgaben, bei denen der aktuelle sowie möglichst auch schon behandelte Heurismen hilfreich sein können.

Dabei wurde in der Rückschau der Heurismeneinsatz zur Überwindung von Barrieren im Problemlöseprozess mittels Lösungsgraphen verdeutlicht.

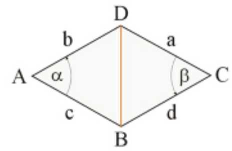


Zu Unterstützung bei der Beweisdarstellung wurde der Zweispaltenbeweis als methodisches Hilfsmittel eingeführt. Der Prozessregulation dienten die Wächterfragen „Warum darfst Du das?“ und „Was bringt es Dir?“, die sich die SchülerInnen bei jedem Schritt vergegenwärtigen konnten.



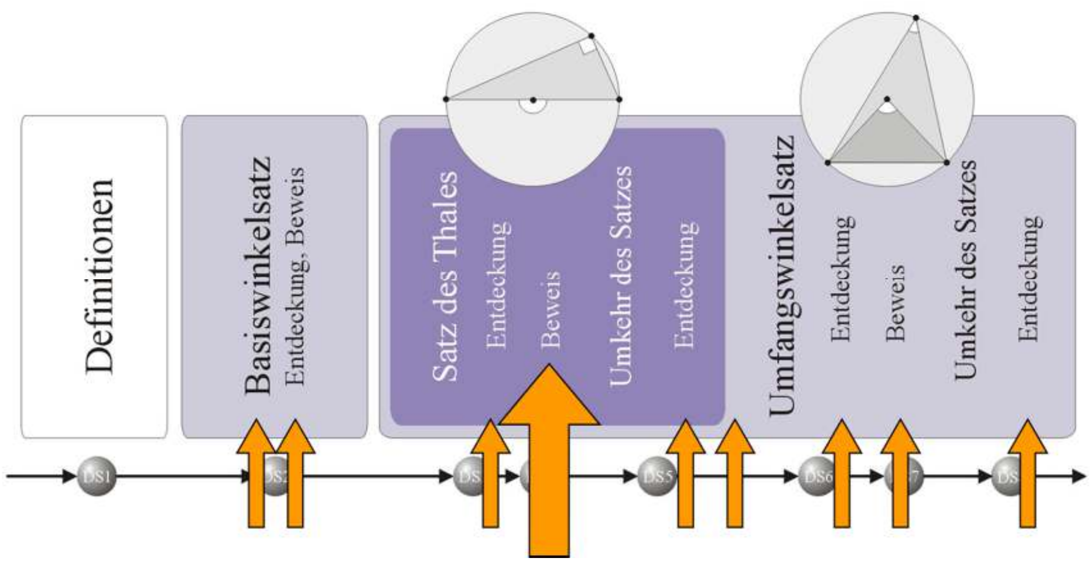
Im impliziten Training wurden diese Hilfsmittel nicht eingeführt; die Heurismen wurden zwar benannt, aber im laufenden Unterricht, nicht in abgehobenen Phasen.

Diese Unterschiede bedingten auch Modifikationen von Aufgabenstellungen – übliche Aufgaben wurden auf zwei Explizitheitsstufen rekonstruiert, um einen trainingsangemessenen Heurismeneinsatz zu ermöglichen: Den impliziert trainierten SchülerInnen (IT-Klasse) wird der Einsatz der auf Basis-Niveau bereits angewandten Heurismus anempfohlen, von den explizit trainierten (ET-Klasse) wird dieser Schritt selbständig erwartet. (Weiteres zum Training in Brockmann-Behnsen Artikel im MU-Heft 5/2014).

Basis	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige an Hand der Skizze, dass die gegenüberliegenden Winkel betragsgleich sind: $\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$ 
IT	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige an Hand einer informativen Figur, dass gegenüberliegende Winkel in einer Raute betragsgleich sind. Führe dazu geeignete Bezeichnungen ein.
ET	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige, dass gegenüberliegende Winkel in einer Raute betragsgleich sind.

Impressionen des Traingsverlaufs

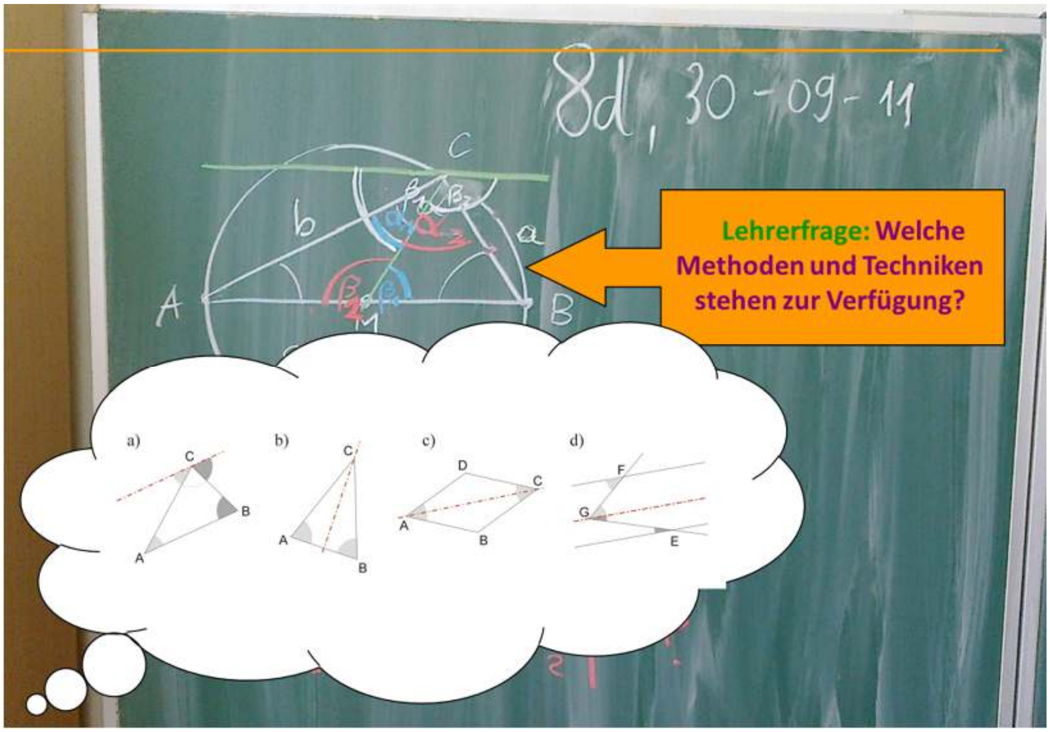
Das Training erfolgte in den Klassenstufen 8 und 9. Es begann mit einer Unterrichtsreihe „Winkel am Kreis“, die so aufgebaut ist:



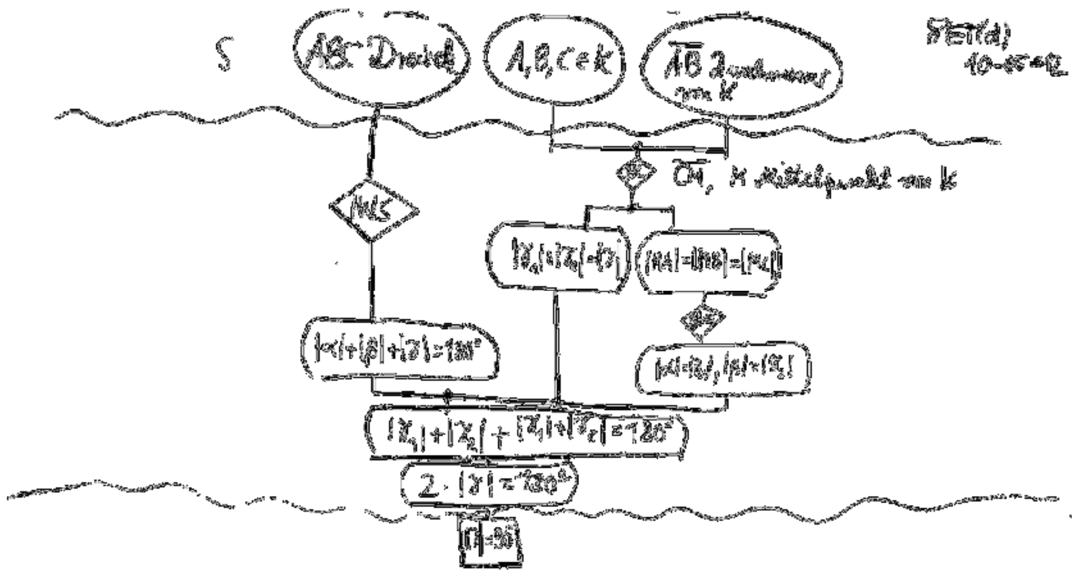
Die orangenen Pfeile markieren den Einsatz von interaktiven elektronischen Arbeitsblättern.

Das Heurismentraining beginnt bei der Erarbeitung des „Thales“-Beweises. Im expliziten Setting fragt der Lehrer zunächst „ungerichtet“, welche Methoden und Techniken zur Verfügung stehen?“ und dann „gerichtet“ nach Möglichkeiten einer Hilfslinie zur Unterstützung der Beweisführung. In der Trainingsklasse wurden dabei auch durchaus sinnvolle Vorschläge aus dem Repertoire der Klasse 7 gemacht, allerdings nicht die zielführende Hilfslinie – diese wurde daher dann vom Lehrer ins Spiel gebracht.

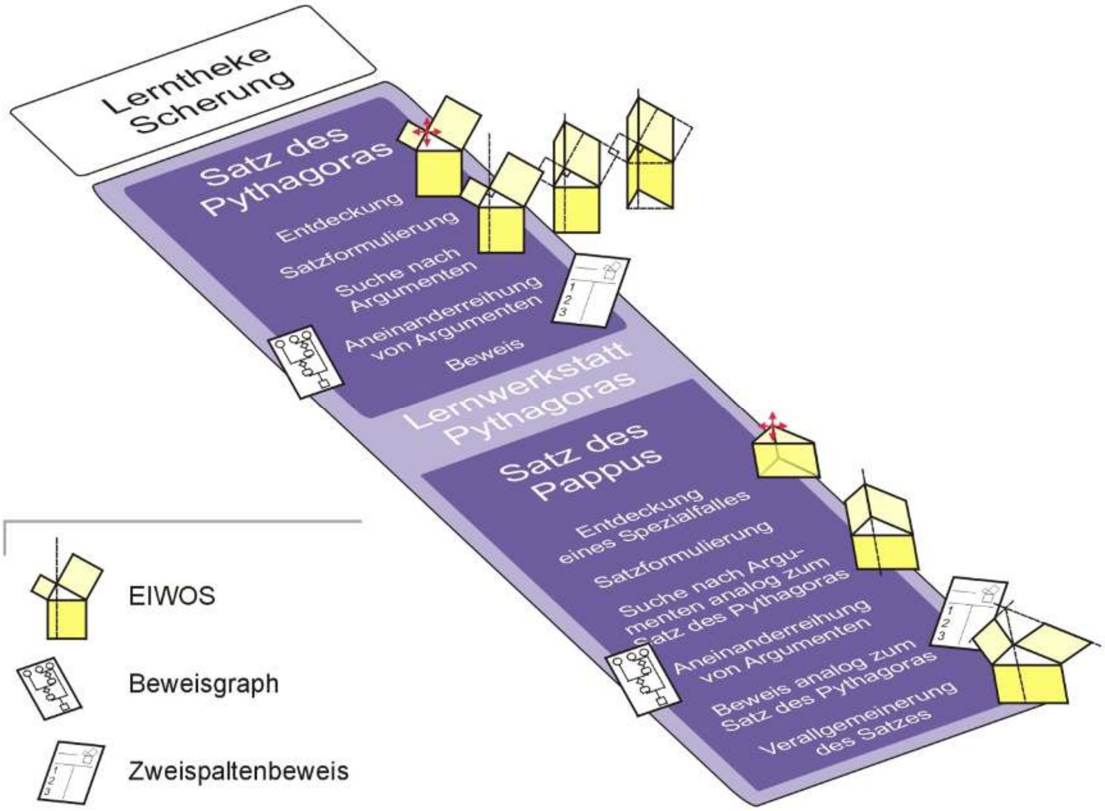
In beiden Klassen wurde der Lösungsgraph als Hilfsmittel bei der Beweisdarstellung eingeführt und bei Erarbeitung des Umfangswinkelsatzes auch als heuristisches Hilfsmittel für den Beweis“umbau“ genutzt.



In einem deutlich späteren Stadium des Trainings wurde die Wiederholung des Thales-Beweises genutzt, um in der Rückschau den Lösungsgraphen auch als heuristisches Hilfsmittel zur Beweisdarstellung und -findung hervorzuheben.



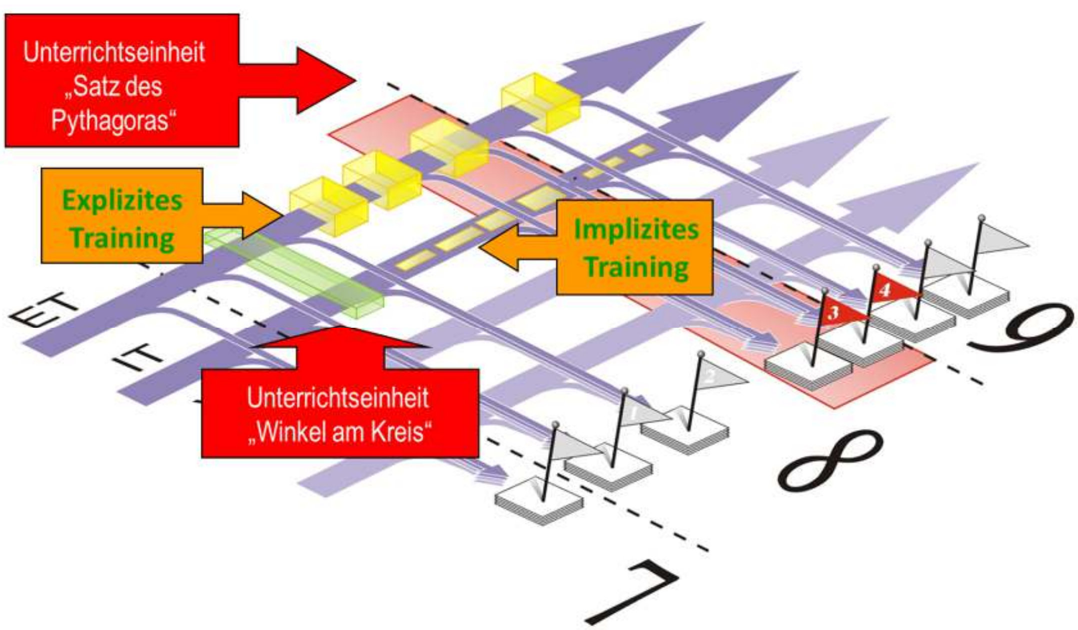
Das Training gipfelte in der Unterrichtseinheit „Satz des Pythagoras“, die in 10 Doppelstunden bis zum Satz des Pappus als Verallgemeinerung führte. Hierbei dient der Lösungsgraph der Beweisorganisation und –elaboration und zum Hervorheben der Analogie Pythagoras-Pappus. (Näheres zur Unterrichtseinheit im Artikel von Brockmann-Behnsen und zum Satz des Pappus in den Artikeln von Elschenbroich und von Gawlick in MU 5/2014.)



Details der Studie

Die Studie wurde über anderthalb Jahre in vier Klassen eines hannoveraner Gymnasiums durchgeführt, wobei je zwei Klassen von Brockmann-Behnsen unterrichtet wurden (Treatmentklassen, N=59) und zwei von Kollegen (Vergleichsklassen, ebenfalls N=59). Der Unterricht in den Treatmentklassen erfolgte wie beschrieben, Unterricht in den Vergleichsklassen unbeeinflusst.

Es handelte sich dabei um eine Interventionsstudie mit Pre- Post- und Follow Up-Test.



Im Ergebnis zeigt sich ein deutlicher Effekt des Trainings auf die Problemlösekompetenz: Die ET-Klasse schneidet hochsignifikant besser ab als die Vergleichsklassen $p<0{,}004$), aber auch als die IT-Klasse C ($p<0{,}007$). Nähere Einzelheiten siehe: Th. Gawlick & S. Begerow: Analyse der Graphen von Lösungen der TIMSS-Aufgabe K10. Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM 2014.

Die Analyse zeigt insbesondere:

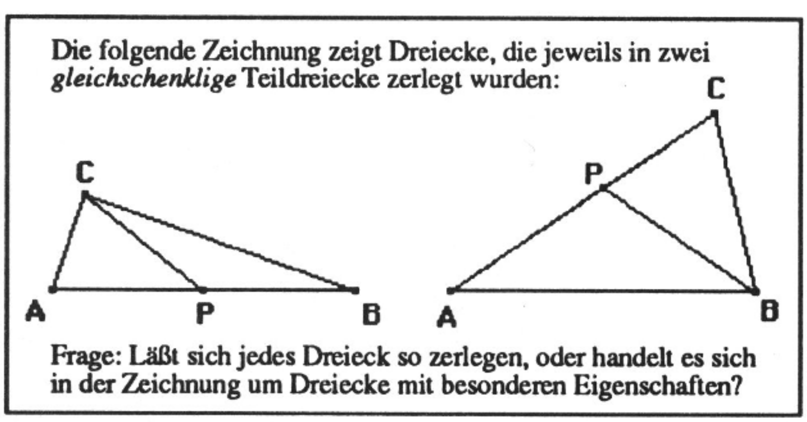
- Die SuS haben die trainierten Heurismen erfolgreich genutzt:
  - Zweispalten-Beweis
  - Lösungsgraph
  - Analogie via Tabelle
  - Entdeckung von Invarianten und Spezialfällen im Zugmodus
- Das Trainings ist effektiv und nachhaltig:
  - Follow Up-Test nach 3 Monaten
- Das explizite Training ist effektiver als das implizite

Der Ansatz der Heuristischen Rekonstruktion hat sich damit zur Elementarisierung des anspruchsvollen Themas als tauglich erwiesen. Konkrete Anregungen dazu, insbesondere für Wahlpflicht-/Profilkurse, finden sich in den o.a. Artikeln in MU 5/2014.

Ausblick: Kognitiv aktivierender Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software

Der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) ist im Rahmen der **Heuristischen Instrumentation** (also der passgenauen Auswahl von lösungsförderlichen Medien und Sozialformen) ein probates Mittel zur Iniitierung heuristisch reichhaltiger Lernprozesse:

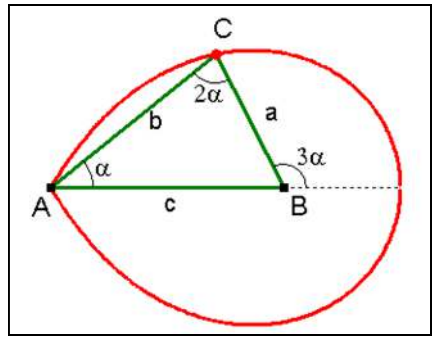
- Im Zugmodus lassen sich geometrische Konfigurationen besser erkunden, denn er liefert gleich eine ganze Klasse von Zeichnungen: eine Figur. Durch Analyse der Eigenschaften, die beim Variieren erhalten bleiben, können geometrische Sätze als Invarianzeigenschaften entdeckt werden.
- Hinausgehend über die induktive Satzfindung unterstützt DGS mit dem Konzept der visuell-dynamischen Beweise auf der Darstellungsebene das inhaltlich-anschauliche, operative Beweisen im Sinne von Wittmann und Müller.
- DGS dient darüber hinaus als Werkzeug für gängige heuristische Problemlösestrategien wie Rückwärtsarbeiten oder Rückführung auf Spezialfälle.
- Das Zusammenspiel von Zugmodus und Ortslinien ermöglicht zudem die visuelle Unterstützung fortgeschrittener heuristische Problemlösestrategien, die darauf basieren, eine Bedingung an die Lösung fallen zu lassen und die Daten zu variieren.



Das Konzept der Heuristischen Rekonstruktion verfügt somit über ein theoriegeleitetes Verfahren, um systematisch Lernumgebungen zu entwickeln, die den Aufbau heuristischer

Kompetenzen ermöglichen, wie sie etwa in Polyas bekannter Tabelle aus „How to solve it!“ versammelt sind. Daas ermöglicht insbesondere durch geeignete unterrichtliche Vorbereitung die adäquate Bearbeitung komplexer Problemlöseaufgaben wie der obigen auch für nicht überdurchschnittlich begabte SchülerInnen.

DGS erweist sich dabei als ein durchaus mächtiges Werkzeug, nicht nur in heuristischer, sondern auch in mathematischer Hinsicht: So konstruierten zwei von uns beobachtete Schüler als heuristisches Hilfsmittel die Spur der Dreiecksecke C bei einem Dreieck vom obigen zweiten Typ bei Variation des Winkels bei A: Die entstehende Kurve ist Teil einer klassischen Kurve (Trisectrix von MacLaurin), die auch als Werkzeug zur Winkeldreiteilung verwendet werden kann. Der Zusammenhang wird plausibel, wenn man sich klar macht, dass Dreiecke vom Typ II der Forderung $\gamma = 2\alpha$ genügen. Übrigens folgt daraus auch eine Variation der Pythagoras-Eigenschaft:



$$a^2 + ab = c^2.$$

Damit schließt sich der Kreis: In heurisch rekonstruierten Lernumgebungen erzeugen die SchülerInnen mit dem heuristischen Werkzeug DGS Phänomene, deren fachliche Durchdringung neue (elementar)mathematische Zusammenhänge offenlegen kann.

Projektpartner

Prof. Dr. Thomas Gawlick
Leibniz Universität Hannover
Institut für Didaktik der Mathematik & Physik
gawlick@idmp.uni-hannover.de

OStD Dirk Brockmann-Behnsen
Bismarckschule Hannover
dirk_brockmann@web.de

Hans-Jürgen Elschenbroich
elschenbroich@dynamische-geometrie.de