Von der Rechtecksquadratur zum Kathetensatz – eine heuristische Rekonstruktion

Thomas Gawlick

Einleitung

Der Kathetensatz ist ein klassischer Zugang zum Satz des Pythagoras und spielt in unserer Reihe dazu eine Schlüsselrolle bei der Verallgemeinerung zum Satz des Pappus, wie in den entsprechenden Heftbeiträgen zu diesem Satz näher ausgeführt wird.

In diesem Beitrag rekonstruieren wir den Ansatz von Fraedrich, die befürchtet, dass der in Schulbüchern und im Unterricht häufig gewählte Weg, den Kathetensatz nicht entdecken lassen, sondern direkt zu formulieren, auch beim Beweis zu einem lehrerzentrierten Vorgehen führt: „Wie soll denn ein Schüler von alleine beispielsweise auf den abbildungsgeometrischen oder gar den vektoriellen Beweis kommen? Er kann nur rein rezeptiv nachvollziehen, was vom Lehrer als Beweis bzw. als Beweisidee vorgegeben wird.“ Fraedrich (1995,152) Auch Fraedrichs Ansatz kommt allerdings bei der Beweisfindung nicht ohne Lehrerimpuls aus. Diesen versuchen wir hier heuristisch zu rekonstruieren. Zunächst ein kurzer Überblick

Fraedrich motiviert die Entdeckung des Kathetensatzes durch das Problem der Rechtecksquadratur. Dieses löst sie mit der klassischen Methode von Analyse und Synthese: Das gegebene Rechteck ABCD wird mit zwei Scherungen erst in das Parallelogramm ABFE und dann in das flächengleiche Rechteck BFGH verwandelt und es werden im „Quadratfall“ Bedingungen abgeleitet, die diesen konstruktiv zu erzeugen gestatten: Die Ecke H liegt auf dem Thaleskreis über AB und auf dem Lot zu AB durch C’, wobei man C’ so auf AB wählt, dass die Dreiecke BFC und BF’C’ kongruent sind – das ist der Analyseschritt. Dann muss noch bewiesen werden, dass das so erhaltene Rechteck BFGH tatsächlich ein Quadrat darstellt – das ist der Syntheseschritt.

Die heuristische Rekonstruktion dieses Ansatzes verfolgt drei Ziele:

1. Die Abfolge der Lösungsschritte soll durch heuristische Impulse gesteuert werden, die den Lernenden bekannt sind.
2. Die Findung der o.a. hilfreichen Zwischenziele (insbesondere die schwer zu motivierende Kongruenz der Dreiecke BFC und BF’C’) soll mit weniger Lehrerimpuls auskommen – dazu werden interaktive elektronische Arbeitsblätter eingesetzt.
3. Fraedrich Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion enthält für die Lernenden wenig einsichtige Zwischenschritte, die wohl nur der Lehrer vorgeben kann (Kollinearität der Punkte D, C und F bzw. A, H und G) und soll daher vereinfacht werden.

Dazu dient folgende, durch heuristische Impulse gesteuerte Folge von Problembearbeitungsphasen und –schritten:

1. Das Problem der Rechtecksquadratur

Hier wird zunächst die motivierende Aufgabe gestellt und im Unterrichtsgespräch exploriert und zur Findung eines Lösungsplans heuristisch aufbereitet. Wie im Basisartikel instrumentieren wir die Antwort auf die Rekonstruktionsfragen 2a und 2b als Pólyaschen Dialog für die Rückschau – mit Ergänzungen, durch die Fragen 2c und 2d in Klammern.

Was ist gegeben? Ein Rechteck mit Seitenlängen r, s.

Was ist gesucht? Eine Konstruktion für ein flächengleiches Quadrat.

Hast Du die Aufgabe schon einmal gelöst? Nein. (Frage 2c: Hier ist erwartbar, dass die Lernenden einen rechnerischen Zugang vorschlagen – und vermutlich einen Lehrerimpuls benötigen, um dabei nicht stehen zu bleiben. Hier genügt der Hinweis, dass die Konstruktion mit Zirkel und Lineal zu erfolgen hat In der Tat ist die Quadratwurzel aus rs die gesuchte Seitenlänge – allerdings ergibt sich daraus noch kein Hinweis darauf, wie sie konstruiert werden kann. Das Problem dabei lässt sich gut veranschaulichen, wenn rs ganzzahlig, aber keine Quadratzahl ist.)

Kennst Du Eine verwandte Aufgabe? Ich habe flächengleiche Dreiecke mittels Scherungen erzeugt.

Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? Welche Sätze kenne ich, die Scherungen auf Rechtecke anwendbar machen? **Satz** Hält man im Parallelogramm ABCD die Grundseite AB fest und verschiebt die Gegenseite CD parallel zu AB auf C'D', so ist auch ABC'D' ein Parallelogramm. Es ist flächengleich zu ABCD. (Frage 2d: Die Scherung gehört nicht mehr zum Standardrepertoire des Geometrieunterrichts. Dieser Satz wurde den Lernenden in der Unterrichtsreihe daher vorab in einer Lerntheke verfügbar gemacht.) Dieser Satz lässt sich auf das gegebene Rechteck anwenden.

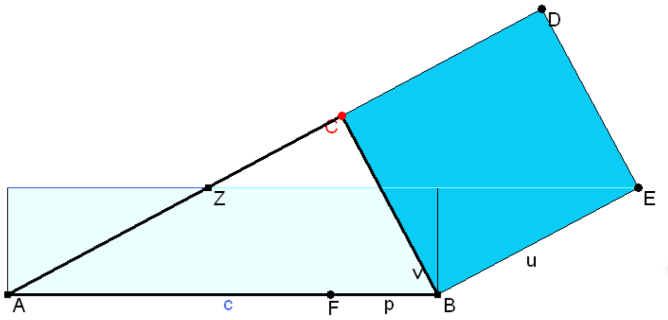
Kannst Du dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Mittels Scherungen das Rechteck in ein flächengleiches mit den Seitenlängen u und v verwandeln – davon kann ich u vorgeben und v ist dann durch die Gleichung rs = uv bestimmt.

Diese Hilfsaufgabe ist offenbar für jedes u eindeutig lösbar. Wie kann man mit ihrer Hilfe die Ausgangsaufgabe lösen? Dazu gilt es, den Parameter u systematisch zu variieren – und das wird angestoßen durch folgende Frage:

Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort, wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern?

Für einen solchen Variationsansatz ist DGS das Mittel der Wahl. Und die geleistete Vorarbeit schafft hier einen geeigneten heuristischen Kontext, der Hölzls Leitfrage für den heuristischen DGS-Einsatz positiv beantwortet: „Kann ich die DGS über die reine Bestätigung eines geometrischen Sachverhaltes hinaus so verwenden, dass dieser, eingebettet in allgemeinere oder speziellere Fragestellungen, in seiner Besonderheit erkennbar ist?“ (Hölzl 1999,56).

2. Analyse des Gesuchten mit Hilfe von DGS



Das elektronische Arbeitsblatt schert zunächst das Rechteck mit den Seitenlänge p und c =|AB| zu einem Parallelogramm ABEZ und dieses dann in das Rechteck BCDE. Durch Ziehen an Z lässt sich jedes u>p als Seitenlänge u=|AZ| realisieren. (Abb. 1)

Im Zugmodus kann man leicht eine quadratische Gestalt von BCDE arrangieren, aber wie lässt sich diese konstruktiv realisieren? Hier wird (wenn nötig, vom Lehrer) an einen schon früher bei Konstruktionsaufgaben genutzten Heurismus erinnert: das (von Pólya so genannte) *Schema zweier Örter* – dabei erhält man die gesuchte Ecke C des Quadrats als Schnitt zweier geeigneter Ortslinien.

Abb.1: Arbeitsblatt Kathensatz-1

Die Dynamik ist dabei ein guter „Trigger" für diesen Heurismus, denn beim Ziehen an Z vollführt C eine auffällige Bewegung. Im Spurmodus wird deutlich: C läuft auf einem Kreis – dem Thaleskreis von AB. Daher gilt es nun, die gesuchte Position von C durch eine weitere Ortslinie zu beschreiben, um das Konstruktionsproblem zu lösen.

Dazu ist ein weiterer Impuls vonnöten, denn die nahe liegende Bedingung dafür, dass BCDE quadratisch ist, muss noch etwas umformuliert werden, um auf eine weitere Ortslinie zu führen: BCDE ist quadratisch genau dann, wenn |BE|=|BC| bzw. wenn C mit dem Schnittpunkt C' des Kreises um B durch E mit BC zusammenfällt. Dieser Schnittpunkt bewegt sich beim Ziehen von Z nun auf einer Orthogonalen zu AB. Der Abstand dieser Orthogonalen zu B beträgt genau p – dies können die Lernenden im Zugmodus mit der heuristischen Strategie, Extremfälle zu betrachten, ermitteln: Bewegt man Z ganz nach links, wandert C auf A und BCDE wird zum Ausgangsrechteck. Dann wird C' zum Fußpunkt der gesuchten Orthogonalen und der Kreis durch E und C' hat den Radius p – dies ist also der fragliche Abstand (Abb.2).

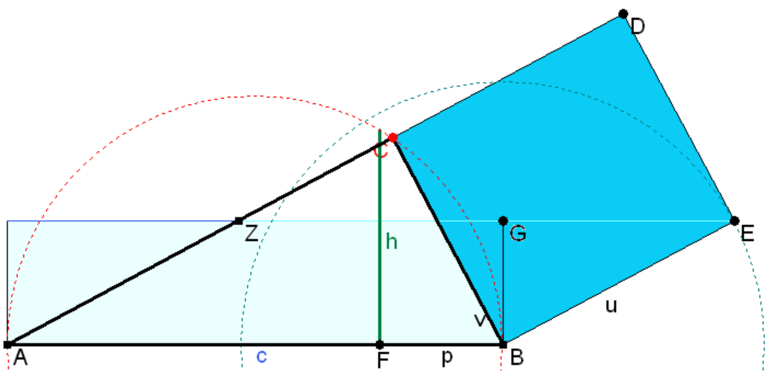


Abbildung 2

Fachlich absichern kann man diese Beobachtung durch folgende Überlegung: C' entsteht aus E durch Vierteldrehung um B und das überträgt sich auf die Ortslinie als Bild der Trägergeraden von Z unter dieser Drehung. Die Trägergerade war parallel, also ist die Ortslinie orthogonal zu AB und aufgrund der Abstandstreue der Drehung haben beide den Abstand p zu B.

Heuristisch instrumentiert wurde diese Phase mittels der gestuften Hilfen von DynaGeo. Nun folgt eine Ergebnissicherung im Unterrichtsgespräch, in dem dann die Beweisnotwendigkeit diskutiert und Ideen für den Beweis gesammelt werden (Durchführung als Hausaufgabe).

3. Synthese des Gesuchten

Aus der obigen Vorarbeit erwächst folgendes Verfahren zur Rechtecksquadratur, in dem wir der Einfachheit halber bereits die im Kathetensatz üblichen Streckenbezeichnungen einführen:

Satz: Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen c=|AB| und p. Dann erhält man wie folgt ein flächengleiches Quadrat: Der Eckpunkt C entsteht, wenn man den Thaleskreis über AB mit dem Lot auf AB im Abstand p zu B schneidet. Das Quadrat BCDE über der Grundseite BC ist dann flächengleich zum Ausgangsrechteck.

Beweis: a) Wir imitieren das Vorgehen bei der Analyse und verscheren das gegebene Rechteck zunächst zum flächengleichen Parallelogramm ABEZ, wobei wir zunächst Z als Schnittpunkt Gegrenseite von AB mit AC konstruieren. Wenn man dieses wie oben weiter zu einem Rechteck schert, muss BCDE entstehen: Die Seite BE bleibt ja bei der Scherung erhalten – und Z wird auf C geschert, da im Eckpunkt des Rechtecks per definitionem ein rechter Winkel entsteht, so dass der Bildpunkt sowohl auf AZ als auch auf dem Thaleskreis liegt!

b) Nun ist noch zu zeigen, dass es sich bei BCDE tatsächlich um das gesuchte Quadrat handelt, dass also |BC|=|BE| gilt. Als Beweishilfsmittel für eine derartige Aussage sind den Lernenden die Kongruenzsätze geläufig (Frage 2d), so dass zunächst in der Beweisfigur nach gleichgroßen Winkeln und gleichlangen Strecken gesucht wird. Dabei richtet sich das Augenmerk schnell auf die Dreiecke BCF und BEG, die die fraglichen Strecken enthalten und in denen zudem nach Konstruktion von C einerseits |CF|=p, nach Voraussetzung aber andererseits auch |BG|=p gilt, so dass bereits ein gleichlanges Streckenpaar vorliegt (Teilzielfrage!) Auch sind beide Dreiecke offenbar rechtwinklig. Nun braucht es ein weiteres identisches Bestimmungsstück. (Teilzielfrage!) Da über das letzte Streckenpaar unmittelbar nichts ausgesagt werden kann, verlagern sich die Bemühungen dahin, ein kongruentes Winkelpaar aufzufinden. Hierbei ist ein hilfreiches Teilziel eine Winkelgleichung, die schon beim Satz des Thales eine Rolle spielte (und in der Unterrichtsreihe später in der Aufgabe K10 wieder auftaucht): Im rechtwinkligen Dreieck ergänzen sich die beiden spitzen Innenwinkel zu einem rechten, in Standardbezeichnungen gilt also in ABC: $|\alpha|+|\beta|=90°$. Entsprechendes gilt aber auch in den Dreiecken BCF und BEG. Man bemerkt vielleicht zunächst, dass der Winkel bei E als Gegenwinkel im Parallelogramm BEZ kongruent zu α ist, so dass der Innenwinkel von BEG bei B kongruent zu β sein muss. Damit ist aber der Kongruenzsatz WSW anwendbar – und daraus folgt die Behauptung.

Frage 2c: Die Inzidenzaussage in a) ist auf Schulniveau nicht eignetständig erschließbar: Pólyas Fragen *Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?* müssen vom Lehrer gestellt und die Beantwortung gelenkt werden.

Die Schritte in b)m können dagegen gut durch die Königfragen aus dem Basisartikelgefunden werden - selbstständig, wenn diese durch ein heuristisches Training bekannt sind, oder vom lehrer, der diese Fragen damit auch gut einführen kann.

Frage 2d: Um die Aussage |α|+|β|=90° in Erinnerung zu rufe, ist vermutlich eine Hilfe nötig. Ein heuristischer Impuls von Pólya dazu wäre: *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden?*

4. Umstrukturierung zum Kathetensatz

Den Kathetensatz erhält man aus dem obigen Satz durch geringfügiges Umstrukturieren: Bei der Rechtecksquadratur waren Grundseite AB und Breite p des Rechtecks gegeben und das gesuchte Quadrat entstand, indem zunächst durch ein geeignetes C das rechtwinklige Dreieck ABC ins Spiel kam. Beim Kathetensatz ist das rechtwinklige Dreieck ABC schon gegeben – und dadurch ergibt sich p als Abstand des Lotfußpunkts F zu B. Der Lösungsgraph in Abb .3 beschreibt diese Umstrukturierung konzis:

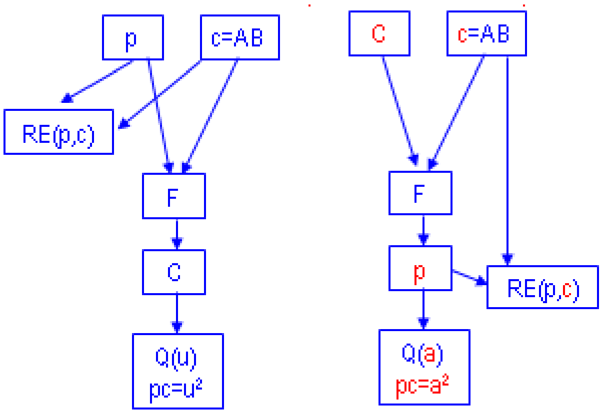


Abbildung 3: Umstrukturierung

Eine weitere Umstrukturierung ist optischer Natur: Beim bisherigen Vorgehen „liegt" das Rechteck *auf* dem Dreieck ABC – üblich ist aber, dass es unterhalb von ABC „steht" Es ist aber zur Festigung eine gute Übung, den so gefassten Kathetensatz nochmals selbständig beweisen zu lassen – z.B. als Hausaufgabe:

Kathetensatz Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck ABC mit Lotfußpunkts F. Sei p=|BF|. Dann ist das Rechteck mit den Seitenlängen p und c flächengleich zum Quadrat der Seitenlänge a=|BC|: a^2=bc.

Beweisskizze: Bei Übernahme des obigen Beweisgangs ergibt sich folgender Ansatz Das gegebene Rechteck lässt sich zu einem Parallelogramm mit Seite BC verscheren und dieses dann in ein Rechteck, das zum gesuchten Quadrat spiegelbildlich liegt. Durch eine Kongruenzüberlegung analog zu oben zeigt man, dass es sich bei dem entstandenen Rechteck auch um ein Quadrat handelt, es ist daher zum gesuchten Quadrat flächengleich und dieses somit zum gegebenen Rechteck.

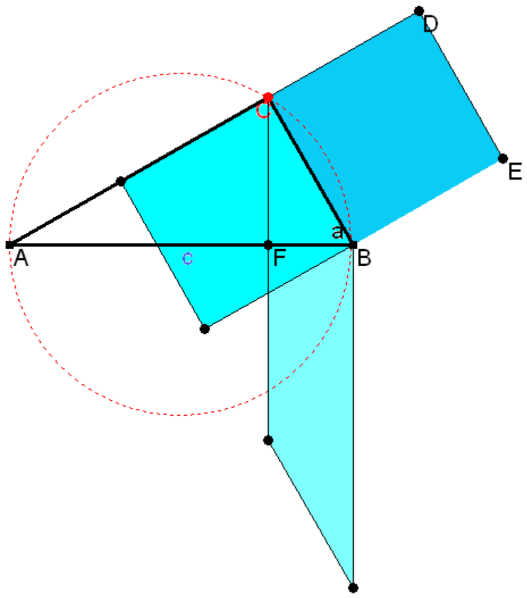


Abbildung 4: Beweisfigur

Gebräuchlich ist demgegenüber die Abbildungsfolge Scherung-Verschiebung-Scherung – aber auch dieser, nach Barth et al. (1988) auf Baravalle zurückgehende Beweis erfordert den Nachweis, dass das entstandenen Rechteck ein Quadrat ist.

Literatur

Fraedrich, A. M.(1995): Die Satzgruppe des Pythagoras. Mannheim: BI.

Barth, F; Krumbacher, G.; Matschiner, E.; Osiander, K.(1988): Anschauliche Geometrie, Band 3, München: Ehrenwirth.