Thomas Gawlick, Hannover

Von Pythagoras zu Pappus – mit Lakatos

Die Methode der Heuristischen Rekonstruktion aus dem Basisartikel wenden wir auf den Satz von Pappus (Abb. 1) als mögliches Ziel eines längeren Heuristik-Trainings an:

5. a) Beweise mittels Scherungen den Satz (Fig. 21.1): Zeichnet man über den Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ und schneiden sich ED und GF in H, so ist die Summe der Parallelogramminhalte gleich dem Inhalt des Parallelogramms $ABIK$, bei welchem $\overline{AK} = \overline{CH}$ und $AK \parallel CH$ ist.

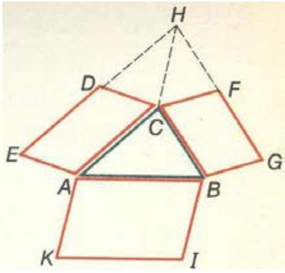


Abb. 1 Satz des Pappus (Lambacher-Schweizer 1968, S.21)

Die Flächenaussage erinnert zwar an den Satz des Pythagoras, doch die Konstruktion des dritten Parallelogramms und die Bedeutung des Punktes H, der beim Pythagoras scheinbar nicht vorkommt, bleiben dunkel. Wie Abb.1 zeigt, ist zwar eine eigenständige Erarbeitung intendiert, jedoch ist die Darbietung Heuristik auf Basis-Niveau: Satz, Figur und – durch die Anleitung „Beweise mittels Scherungen“ – auch das Beweishilfsmittel sind vorgegeben. Hier setzt die Schlüsselfrage 2c. der Heuristischen Rekonstruktion an: *Was davon lässt sich von den SuS selbständig erschließen?*

Bei näherem Hinsehen erweist sich die Suche nach der passenden Analogie beim Satz des Pappus als Spezialfall einer allgemeineren Methode, die als paradigmatisch für die Mathematik gilt: Die Methode der Beweise und Widerlegungen nach Lakatos(1979). Der Satz des Pappus wird dabei zu einem beweiserzeugten Satz – und das erklärt, warum er ohne diesen Zugang so schwer zu formulieren und so schlecht zu behalten ist.

Heuristik nach Lakatos

Lakatos geißelt den deduktivistischen Stil, der den Entstehungsprozess von Beweisen verdunkelt und damit sowohl das Verständnis erschwert als auch dem eigenständigen Finden von Beweisen im Wege steht, denn er reißt „die beweiserzeugten Definitionen von ihren ‚Beweis-Vorfahren' fort und stellt sie aufs Geratewohl vor, in einer gekünstelten und autoritären Weise. Er verbirgt die globalen Gegenbeispiele, die zu ihrer Entdeckung führten. Im Gegensatz dazu leuchtet der heuristische Stil diese Umstände deutlich aus.“ (ebd., S.136) Zu lehren ist also nicht nur der Beweis, sondern auch das Verfahren zu seiner Entdeckung – und das beschreibt Lakatos so:

Die Methode der Beweise und Widerlegungen

Sie „besteht aus den folgenden Stufen:

(1) Ursprüngliche Vermutung

(2) Beweis (ein grobes Gedankenexperiment oder Argument, das die ursprüngliche Vermutung in Untervermutungen oder Hilfssätze zerlegt)

(3) ‚Globale' Gegenbeispiele (Gegenbeispiele zur ursprünglichen Vermutung) tauchen auf

(4) Neuuntersuchung des Beweises: der schuldige Hilfssatz, zu dem das globale Gegenbeispiel ein lokales Gegenbeispiel ist, wird ausfindig gemacht. Dieser schuldige Hilfssatz kann vorher versteckt geblieben oder falsch eingeordnet worden sein. Jetzt wird er

deutlich bestimmt und als Bedingung in die ursprüngliche Vermutung eingebaut. Der Satz - die verbesserte Vermutung - verdrängt die ursprüngliche Vermutung mit dem neuen beweiserzeugten Begriff als entscheidendem neuem Merkmal.“ (ebd., S. 119)

Ein Prozessmodell der Methode

Lakatos hat seine Methode leider nur in Beispielen ausgeführt. Wir beschreiben hier zunächst den modellhaften Ablauf mit Hilfe von Lösungsgraphen (Abb. 2). Eine Vermutung V→ B wird aufgestellt: „(1) Vor V“ und „(1) Beh B“. Dann wird sie sowohl zu beweisen versucht („(2) Bew“) als auch an Beispielen geprüft:“P“. Mit Gegenbeispielen(3) wird dann in der Neuuntersuchung (4)so umgegangen: Eine Beweisanalyse „(4a) BA“ enthüllt versteckte Hilfssätze, die nicht mehr gelten – daher wird per Rückübertragung die Voraussetzung V zu V‘ modifiziert, um das zu beheben: „ (4b) RÜ“. Zugleich wird der Hilfssatz dem Beweis hinzugefügt. Die Umkehr der Pfeilrichtung in Stufe 3 und 4 veranschaulicht den dialektischen Charakter der Methode, der anders als die deduktivistische Wahrheitsübertragung einen Erkenntnisfortschritt bewirkt.

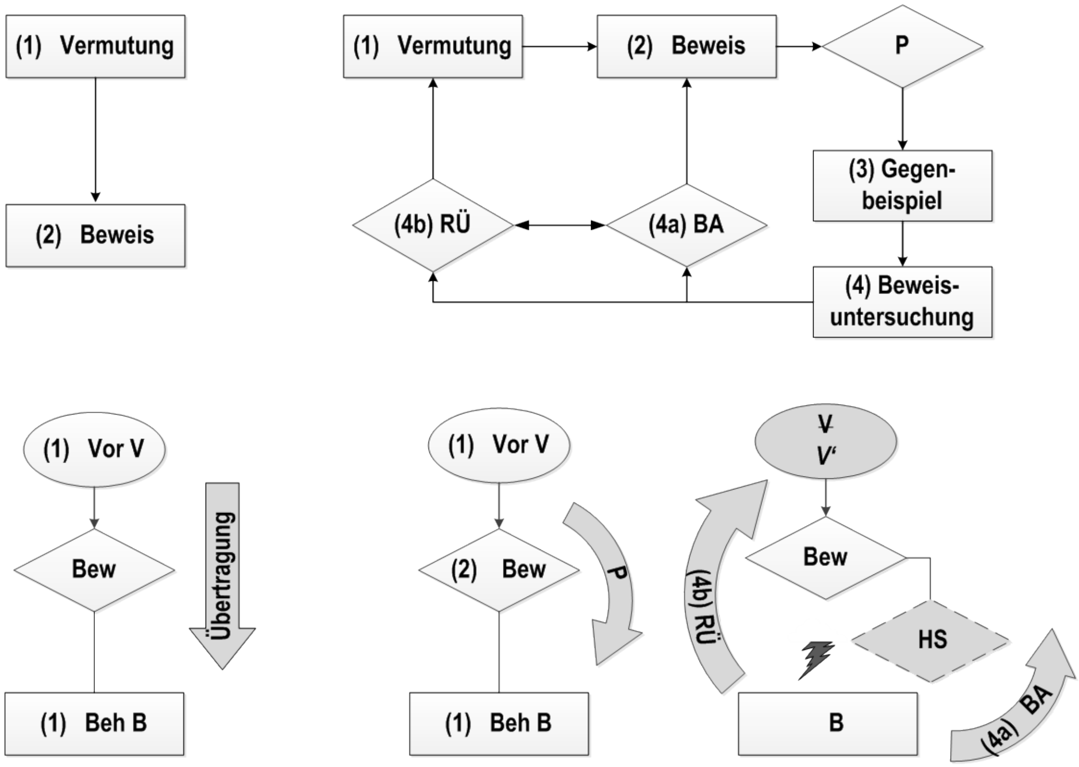


Abb. 2: Deduktivistischer (links) vs. heuristischer Stil rechts), Prozessmodell (oben) und Graph-Operationen(unten

Nachfolgend werden wir skizzieren, wie die Lernenden die Methode beim Satz des Pappus weitgehend selbständig durchführen können. Heuristische Aktivitäten:

(V) Verallgemeinern als Weglassen von Voraussetzungen
(A) Analogisieren als Modifzieren von Bedingungen
(P) Prüfen
(BA) Beweisanalyse
(RÜ) Rückübertragung

Anwendung der Methode auf die Satzfindung beim Satz des Pappus

Zunächst sollte die Lehrperson die Wahl von Bezeichnungen so anleiten, dass sie die Analogiesuche notationell unterstützen: In beiden Sätzen geht es um Flächen über den Seiten eines Dreiecks - im Pythagoras-Fall Quadrate, im Pappus- Fall Parallelogramme, was aber gerade erst herauszuarbeiten ist! Wir setzen die Flächen daher zunächst als Vierecke an – so können verschiedene Versionen ausprobiert werden, bis die passende gefunden ist. Die Tabelle zeigt die Synopse der Bezeichnungen mit Elschenbroichs Pappus-Version und Brockmann-Behnsens Pythagoras-Beweis Beim Pythagoras wählen wir Satzdarstellung S: V→ B, wobei $V = V_1 \wedge V_2$ mit V_1: ABC ist rechtwinkliges Dreieck, V_2: P, Q, R sind Quadrate über c, b, a. B: $|P| = |Q| + |R|$.

Seite	Satzfindung: Vierecke	Pythagoras: Quadrate	Pappus: Parallelogramme
c	P	Q_c	P_c
b	Q	Q_b	P_b
a	R	Q_a	P_a

(1) Ursprüngliche Vermutung

(V) Auf die Voraussetzung „rechtwinklig“ soll verzichtet werden.

(P) Eine dynamische Erkundung zeigt, dass die Flächensumme der Kathetenquadrate im Innern des Thaleskreises kleiner, außerhalb größer ist als die Fläche des Hypotenusenquadrate. Daher muss auch die Behauptung modifiziert werden. Üblicher Weise würde man nun die Gleichung $|P| = |Q| + |R|$ modifizieren – das führt z.B. auf den Kosinussatz, der aber für Schüler wohl nicht selbständig entdeckbar ist. Alternativ kann die Gleichung $|P| = |Q| + |R|$ auch anders interpretiert werden – und hier kommt nun (R) ins Spiel:

(RÜ) Wenn die Gleichung so nicht stimmt, dann stimmt evtl. auch etwas mit den Voraussetzungen nicht. Wie kann man die ändern?

(A) Eine einfache Möglichkeit ist z.B., P als Rechteck anzusetzen. (Abb. 3, Modifikation durch RÜ grau unterlegt) Das kann bei festem c in Abhängigkeit von der Position von C größer oder kleiner werden.

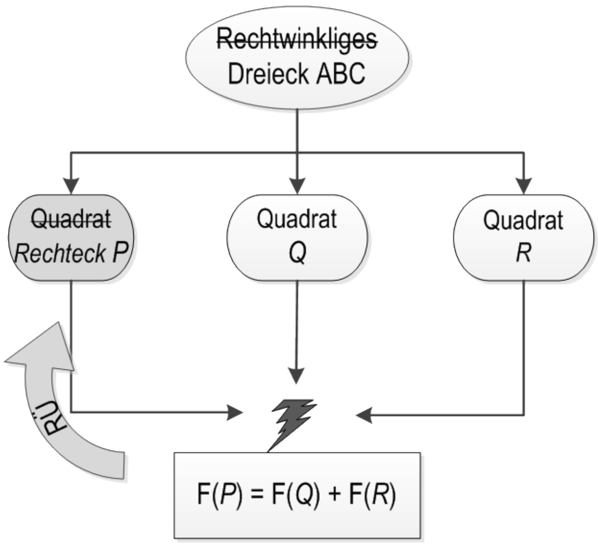
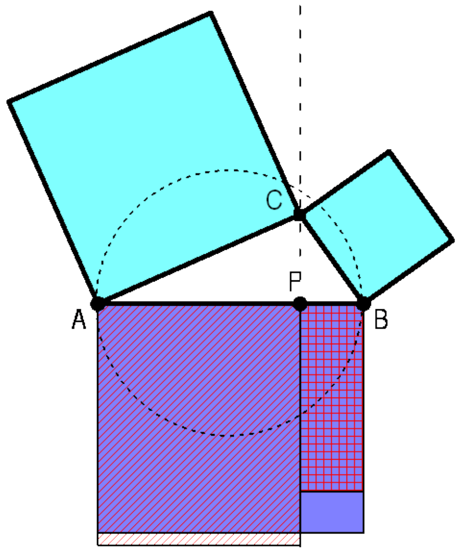


Abb. 3: Anpassen der Voraussetzung durch einfache Rückübertragung

Man beachte: Diese Rückübertragung erfolgt nicht auf der Basis einer Beweisanalyse, sondern versucht nur, das Gegenbeispiel auszuschalten. Mit Lakatos könnte man hier von „Monsteranpassung“ sprechen. Diese hat jedoch keinen Bestand, wie sich zeigt.



(2) Beweis

Wie bei Lakatos ist dies nur „ein grobes Gedankenexperiment oder Argument, das die ursprüngliche Vermutung in Untervermutungen oder Hilfssätze zerlegt“:

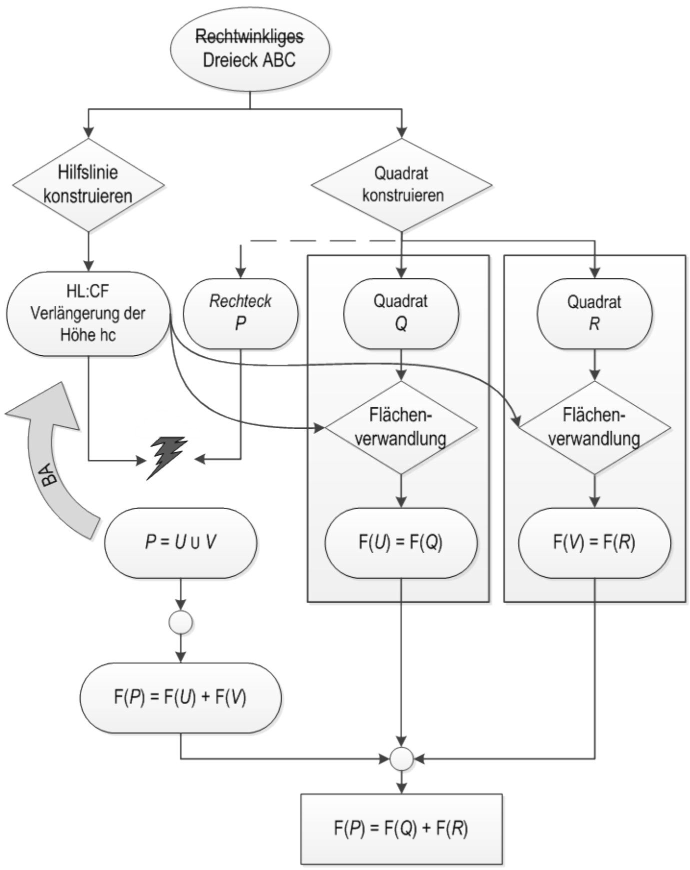
(A) Durch die obige Anpassung der Voraussetzung besteht die Hoffnung, den Pythagoras-Beweis 1:1 übernehmen zu können.

(3) Globale Gegenbeispiele

(P) Eine dynamische Erkundung zeigt, dass dieser Plan nicht durchführbar ist. (Abb.4)

Abb.4 : Die zu den Quadraten flächengleichen Rechtecke bilden kein Rechteck

(4) Neuuntersuchung des Beweises



(BA) Wir betrachten den Pythagoras-Graphen aus Brockmann-Behnsens Unterrichtsreihe mit angepassten Bezeichnungen. Die Analyse zeigt, dass die Beweiskette bei $P = U \cup V$ zerreißt, was der Blitz in Abb.5 symbolisiert. Hier ist also eine versteckte Hilfsaussage zu erwarten. Abb. 4 lehrt uns, worin sie besteht: U und V hatten vorher eine gemeinsame Kante. Der ursprüngliche Beweis wird ergänzt um diese Hilfsaussage. (vgl. Abb.7)

(RÜ) Die U und V erzeugende Hilfslinie dient also nicht mehr ihrem Zweck. Wie kann man sie anpassen?

(P)Dazu ist es sinnvoll, sich der Funktion der Hilfslinie zu entsinnen: sie wurde benutzt, um die Quadrate zu Parallelogramme.zu scheren (Abb.6)

Abb.5 Erste Beweisanalyse

(BA) Ursprünglich hatten die Parallelogramme eine gemeinsame Kante und daher auch U und V. Auch diese Aussagewird dem Beweisgraph hinzugefügt (Abb.6). Aber sie ist nach Abb. 6 nicht mehr erfüllt es muss daher noch einen versteckten Hilfssatz geben!

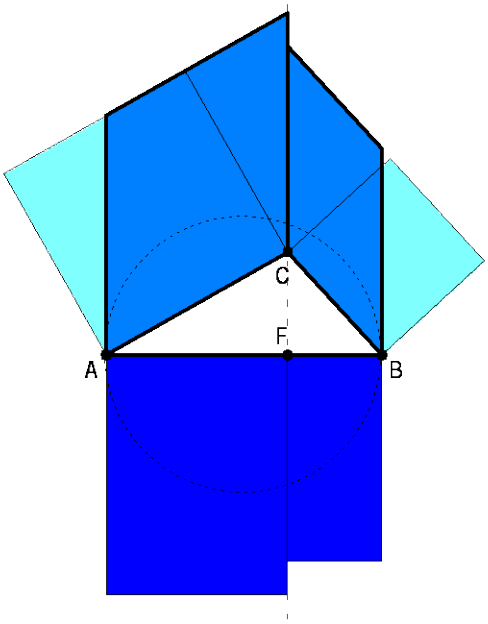


Abb.6 Dynamische Erkundung zeigt die Funktion der Hilfslinie

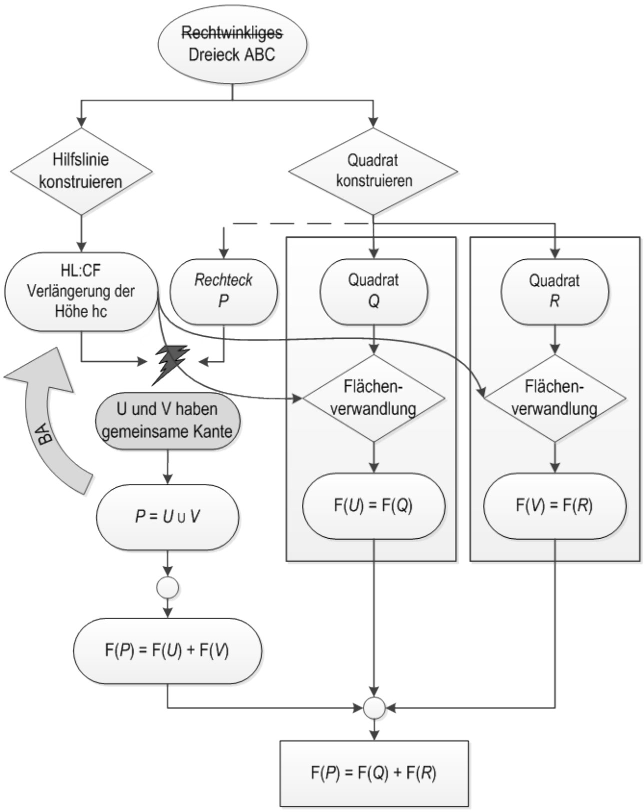


Abb.7 Zweite Beweisanalyse

(BA) Woran liegt es, dass die Parallelogramme eine gemeinsame Kante auf der Hilfslinie haben? Ganz einfach: Weil sich die Scherlinien auf der Hilfslinie schneiden – und dies gilt nicht mehr, wenn C nicht mehr auf dem Thaleskreis liegt (Abb.8).
(RÜ) Damit dieser Hilfssatz gilt, muss also die Hilfslinie entsprechend verändert werden. Das geschieht in Abb. 9 – nun muss man modellkonform aber auch die Voraussetzung verändern: Wenn die Hilfslinie nicht mehr orthogonal zu AB ist, können U und V und damit auch P keine Rechtecke mehr sein.
(V) Daher ist es sinnvoll, den Satz für Parallelogramme zu formulieren, wie in Abb. 1.

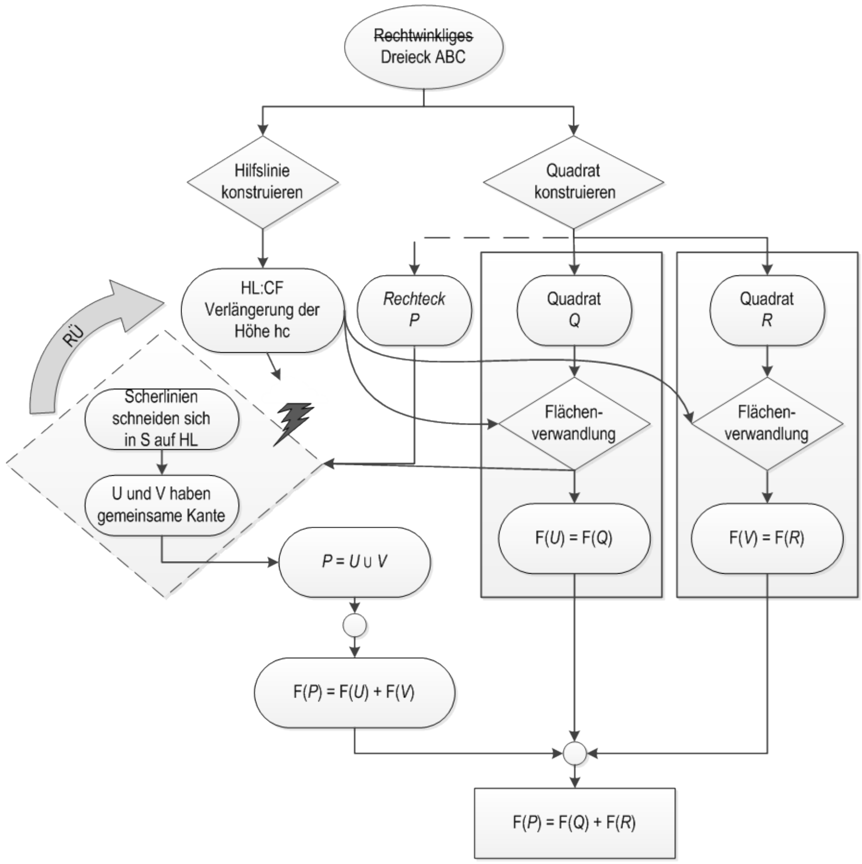


Abb. 8 Die dritte Beweisanalyse enthüllt den Hilfssatz

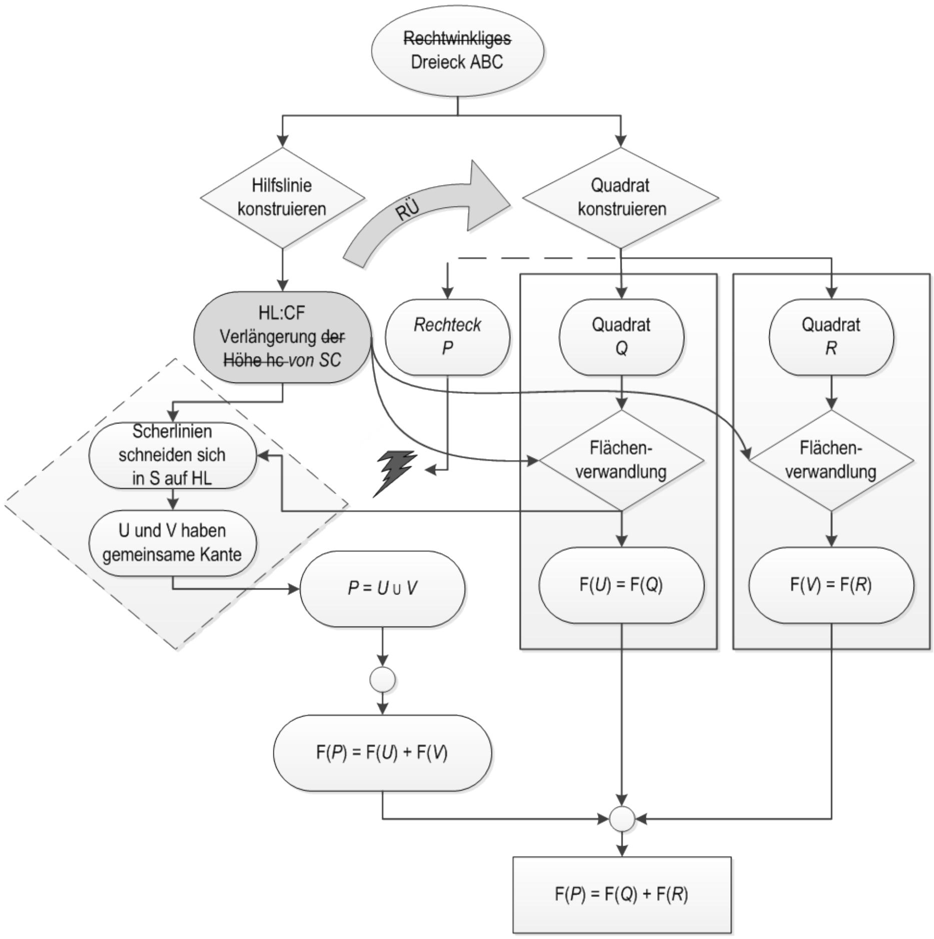


Abb. 9 Rückübertragung des Hilfssatzes auf die Voraussetzungen

(BA) Bei gänzlich freier Wahl der Parallelogramme kann man natürlich nicht erwarten, dass noch |P| = |Q| + |R| gilt. Die vorherige Analyse zeigt aber, worauf es ankommt: Damit $P = U \cup V$ gelten kann, müssen die Kanten gleichlang sein – und aufgrund der Konstruktion haben sie die Länge |SC|.
(RÜ) Man kann Q und R frei wählen und erhält die Kantenbedingung für P: |AK|=|SC|.
(P) Eine dynamische Überprüfung (Abb.10) zeigt: Nun passt es!

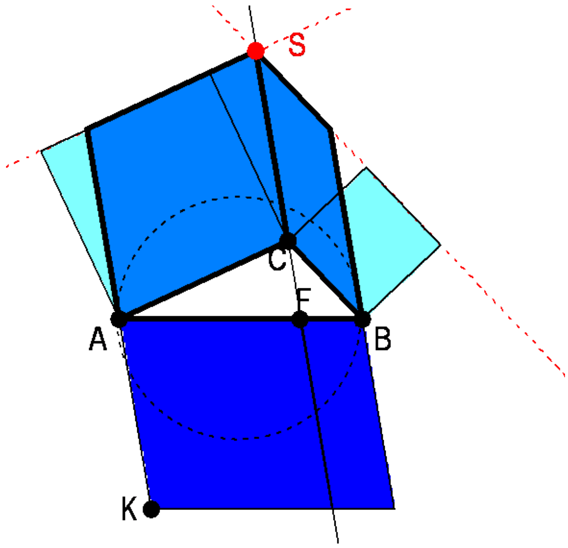


Abb. 10 Dynamische Verifikation des Beweises

Damit ist die Findung des Satzes aus Abb.1 abgeschlossen. Abb. 11 zeigt nochmal das Ergebnis der dabei erfolgten Rückübertragungen. Durch die Methode der Beweise und Widerlegungen konnte die Rolle des Punktes S in Abb.1 aufgeklärt und der Satz des Pappus als *beweiserzeugte* Pythagoras-Verallgemeinerung gefunden werden.

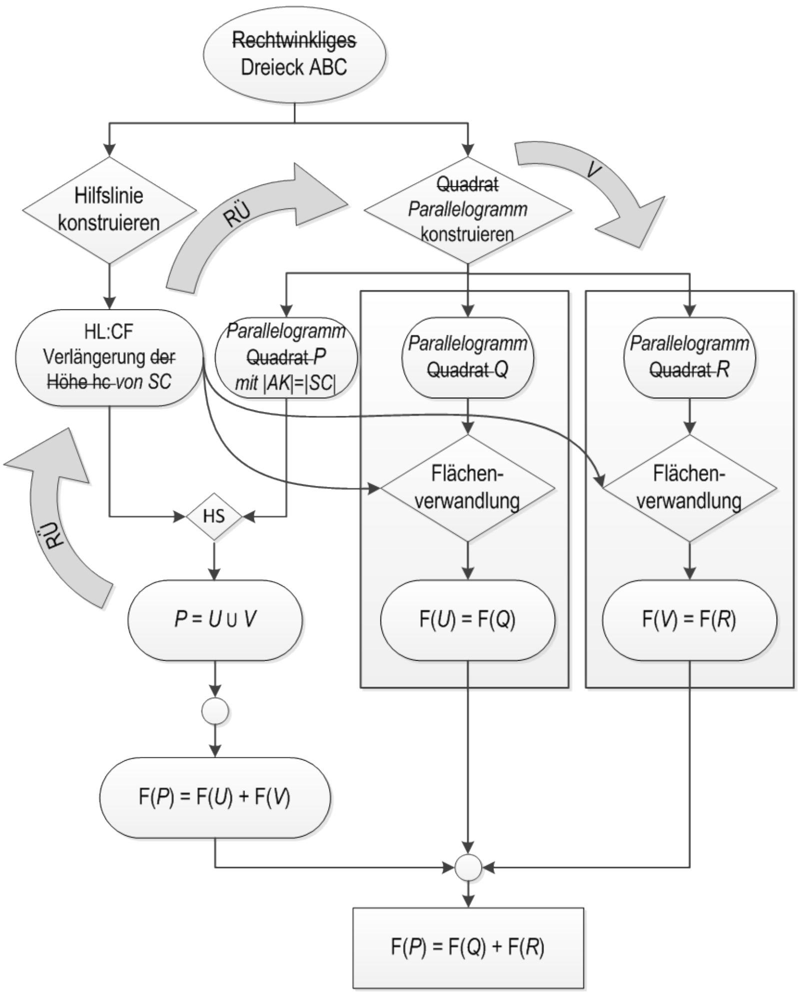


Abb. 11 Gesamtergebnis der Rückübertragungen

Quelle: Th. Gawlick: **Von Pythagoras zu Pappus – mit Lakatos**
In: Der Mathematikunterricht. Heft 5 (2014), S. 42-49